Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Cadre 0 : n désignera un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On prendra $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{K})$

Def 1 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une équation différentielle linéaire d'ordre p est une équation différentielle sur $\mathbb{K}^n$ de la forme

$$(L)\quad y^{(p)} = A_{p-1}(t)\, y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)\, y + B(t)$$

où $A_0, \dots, A_{p-1} : I \to M_n(\mathbb{K})$ sont continues et $B : I \to \mathbb{K}^n$ est une fonction continue. Lorsque B est nulle sur I, (L) est dite homogène.

Rq 2 : On peut toujours se ramener à un système d'ordre 1 en écrivant (L) sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & I_n \\ A_0(t) & \cdots & & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

I) Étude théorique des solutions

I-1) Existence et unicité, espace des solutions

Thm 3 : [Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire] Soit une équation de la forme (L_1) $y' = A(t)\,y + B(t)$ où $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_n(\mathbb{K})$ continues. Alors, pour tout $t_0 \in I$, et pour tout $x_0 \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution V de (L_1) définie sur I tout entier, telle que $V(t_0) = x_0$.

Thm 4 : Soit $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ une fonction continue. L'ensemble S_H des solutions maximales de l'équation différentielle linéaire homogène (H) $\frac{dy}{dt} = A(t)\,y$ est un sous-espace vectoriel de dimension n du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $C^1(I, \mathbb{K}^n)$.

Rq 5 : On en déduit que l'ensemble des solutions de (L_1) est un espace affine de dimension n / Si V est une solution particulière de (L_1), les solutions de (L_1) s'écrivent sous la forme $V + V_0$ où V_0 décrit les solutions de (H).

I-2) Wronskien

Cadre 6 : On se donne (H) $y' = A(t)\,y$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur $\mathbb{K}^n$ où $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ continue.

Def 7 : Soient $V_1 \dots V_n$ n solutions de (H). On appelle wronskien de $V_1 \dots V_n$ l'application définie de I dans $\mathbb{K}$ par $t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$

Prop 8 : Soient $V_1, \dots, V_n$ n solutions de (H). Le rang des vecteurs $V_1(t) \dots V_n(t)$ est indépendant de $t \in I$.

Coro 9 : Des solutions $V_1, \dots V_n$ de (H) forment une base de solutions de (H) si et seulement il existe $t_0 \in I$ tel que le wronskien $(V_1, \dots, V_n)(t_0) \neq 0$. Dans ce cas on a wronskien $(V_1, \dots, V_n)(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$

II) Résolution pratique

II-1) Rappel sur l'exponentielle de matrices

Def 10 : En munissant $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative, on définit l'exponentielle d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ par $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

Prop 11 : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

Prop 12 : $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ $\det(e^A) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

Rq 13 : L'exponentielle d'une matrice est "plus facile" à calculer sous certaines propriétés de A (diagonalisable, trigonalisable). En effet pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$ $e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$.

II-2) Forme des solutions dans le cas autonome

Cadre 14 : $A(t)$ ne dépend plus de t : le système est autonome $t_0 \in I$, $V_0 \in \mathbb{K}^n$ fixés.

Thm 15 : La solution de $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay \\ y(t_0) = V_0 \end{cases}$ est donnée par $y(t) = e^{(t-t_0)A} V_0$

Thm 16 : La solution générale du problème de Cauchy $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay + B(t) \\ y(t_0) = V_0 \end{cases}$ est donnée par $y(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot V_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)\,du$

I-3) Une application particulière

Les équations différentielles permettent de résoudre des équations matricielles.

Thm 17 : [Décomposition de Dunford]. Soit A tel que χ_A soit scindé. Il existe D diagonalisable, N nilpotente telles que : (i) $A = D+N$ (ii) $DN = ND$ (iii) $Sp(D) = Sp(A)$

Lemme 18 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont toutes de partie réelle strictement négative. Alors, il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$ $|||e^{tA}||| \leq \lambda e^{-\alpha t}$

DEV1

Thm 19 : [Equation de Sylvester] Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres de partie réelle < 0. Alors, pour tout $C \in M_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution $X \in M_n(\mathbb{C})$.

I-4) Cas non autonome et variation des constantes.

Méthode 20 : Dans le cas général, il n'existe pas de méthode explicite pour résoudre (H) $y' = A(t)y$ lorsque $n \geq 2$. Cependant si on connait n solutions linéairement indépendantes de (H), une solution de (H) est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq n)$.

On recherche alors des solutions de (L) : $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ sous la forme $V : t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) V_i(t)$ où $\lambda_i : I \to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^1$

On obtient V solution de (L) ssi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) V_i(t) = B(t)$

Ex 21 : cas particulier de la dim 2

On résoud $Y' = A(t)Y + C(t)$ où $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$ $C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$

(c'est l'équation $y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$)

La méthode 20 revient à résoudre, en supposant connues u et v, deux solutions linéairement indépendantes de (H) : $y'' = a(t)y' + b(t)y$:

$$\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = c(t) \end{cases}$$

Rq 22 : Le théorème 16 est une application de cette méthode dans le cas autonome.

I-5) Recherche de solutions développables en séries entières.

Méthode 23 : dans certains cas, on recherche les solutions sous la forme d'une série entière $\sum a_n x^n$. L'unicité du développement en série entière est ici essentielle.

Ex 24 : L'équation de Bessel d'ordre 0

(E) $\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

admet comme solution développable en série entière

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}.$$

III) Etude qualitative des solutions

III-1) Généralités

Def 25 : Soit l'équation différentielle générale $y' = f(t, z)$ avec condition initiale $y(t_0) = z_0$

Soit $y(t, \cdot)$ la solution maximale (on suppose définie de cette forme pour tout $t \geq t_0$) d'un problème de Cauchy. On dira que $y(t, z_0)$ est stable s'il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une constante $C \geq 0$ telles que

(i) Pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$, $t \mapsto y(t, z)$ définie sur $[t_0 ; +\infty[$

(ii) Pour tous $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$, on a

$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq C\|z - z_0\|$

La solution $y(t, z_0)$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si la condition (ii') plus forte que (ii) est satisfaite :

(ii') Il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une fonction $\gamma : [t_0 ; +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue avec $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0$ telles que pour tous $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$ on ait

$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq \gamma(t)\|z - z_0\|$.

DEV2

Thm 26 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres complexes $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont :

- asymptotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$
- stables si et seulement si pour tout j, ou bien $Re(\lambda_j) < 0$, ou bien $Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonale.

Thm 27 : [Théorème de Liapounov] Soit le système différentiel $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ classe C^1, $f(0) = 0$.

Si la matrice $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : pour tout x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Rq 28 : ce théorème met directement en lien des propriétés du système avec son linéarisé.

III-2) Exemple : cas d'un champ linéaire de vecteurs

Etude 29 : Considérons le système $\dfrac{dM}{dt} = AM$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(on suppose $\det A \neq 0$)

$$(C) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \qquad M(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

La solution de (C) est
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$
(noeud ou col impropre)

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda t} \end{cases} \text{ si } A \text{ diagonalisable}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x t) e^{\lambda t} \end{cases} \text{ sinon}$$

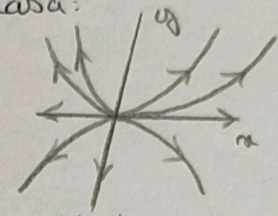
c) $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

On pose $z = x + iy$

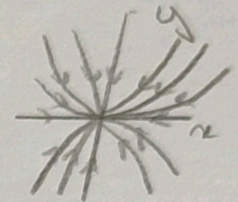
$$z(t) = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}$$

Annexe : Etude 29

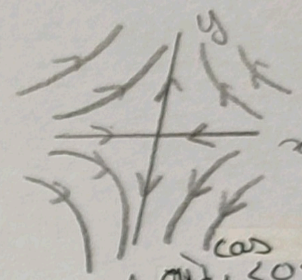
. cas a :



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$
noeud impropre instable

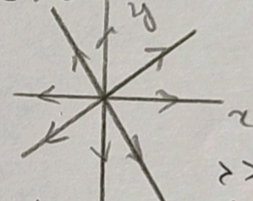


$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
noeud impropre stable

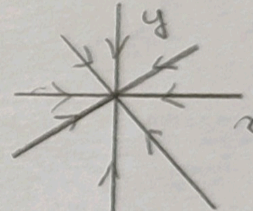


cas où $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
col (toujours instable)

. cas b : dans le cas A diagonalisable



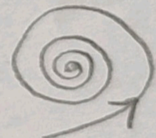
$\lambda > 0$
noeud propre instable



$\lambda < 0$
noeud propre stable

cas c :

Foyer instable
$\alpha > 0$



Foyer stable
$\alpha < 0$

Centre
$\alpha = 0$